

## 基于梁单元的曲面软体机器人简化力学模型

程屹涛, 杨焕煜, 刘珂

(北京大学工学院先进制造与机器人系, 北京 100871)

**摘要:** 针对一种可进行曲面自由变形的软体机器人, 提出了一种基于梁单元和非线性有限元理论的简化力学模型。首先, 使用特定的梁单元对曲面软体机器人进行有限元离散。其次, 使用牛顿-拉弗森迭代法对非线性变形过程进行求解, 同时推导出给定全局几何特征时逆向求解各个驱动器收缩量的映射关系。数值计算和仿真结果表明, 该简化力学模型为曲面软体机器人的建模、仿真以及控制提供了一个高效的计算平台。

**关键词:** 软体机器人; 简化力学模型; 梁单元; 非线性有限元

## Reduced Order Model for Soft Robotic Surface Based on Beam Elements

CHENG Yitao, YANG Huanyu, LIU Ke

(Department of Advanced Manufacturing and Robotics, College of Engineering, Peking University, Beijing 100871, China)

**Abstract:** For a type of soft robotic surface capable of freeform deformation, a reduced order model based on beam elements and nonlinear finite element theory is proposed. Firstly, specialized beam elements are used to discretize the soft robotic surface. Secondly, Newton-Raphson iteration method is employed to solve the nonlinear deformation process. This paper also derives the inverse mapping from global geometric features to the local contraction of each artificial muscle. Numerical calculation and simulation results show the reduced order model provides an efficient computational framework for the modeling, simulation, and control of the soft robotic surface.

**Keywords:** soft robot; reduced order model; beam element; nonlinear finite element

随着工业技术的发展和人工智能的大范围普及, 机器人在社会生产生活中得以广泛应用<sup>[1-3]</sup>。以往由刚性材料制造、硬质组件传动的刚体机器人, 拥有高动力、高承载能力、高精度等优点<sup>[4]</sup>, 但其工作和运动方式有异于大自然中的生物体, 限制了它与环境 and 生物交互的能力<sup>[5]</sup>。与此形成鲜明对比的是, 软体机器人往往由柔性的智能材料作为动力单元, 辅以仿生的结构或运动设计, 比拟了动物骨骼肌肉系统, 使其能很好地应对环境适应性和生物亲和性的挑战<sup>[6-7]</sup>。

近年来, 软体机器人的研究和应用飞速发展, 研究人员开发了许多软体机器人用于自主驱动或人机交互作业, 例如仿尺蠖软体机器人<sup>[8-9]</sup>、深海软体机器鱼<sup>[10-11]</sup>、磁控移动软体机器人<sup>[12-14]</sup>、仿章鱼软体触手<sup>[15]</sup>、柔性可穿戴康复手套<sup>[16]</sup>等。Liu 等<sup>[17]</sup>开发了一种 3 维曲面可以自由变化的软体机器人, 该机器人可以通过调节电流改变其曲率, 进而形成不同的曲面形状, 展现了强大的变形能力。

虽然研究人员针对不同的应用场景和工作条件

研制了不同的软体机器人, 但是如何精确建模并仿真其变形和运动行为一直是软体机器人研究所面临的关键技术难点<sup>[18]</sup>。软体机器人理论上拥有无限自由度, 其组成材料往往是高度非线性的<sup>[19]</sup>, 机器人自身的大变形也有着高度的几何非线性特性, 这些特性的叠加使其建模难度相对于刚体机器人显著提高, 使得以往方法在软体机器人的建模中常常失效。因此, 研究人员开发了一系列降维模型以实现软体机器人的高效建模<sup>[20]</sup>。例如 Katzschmann 等<sup>[21]</sup>基于微分几何理论, 采用常曲率模型实现了对模块化软体机械臂的运动学建模; Renda 等<sup>[22]</sup>基于力平衡原理, 采用 Cosserat 杆理论对绳驱动连续体软体机器人手臂进行了精确建模; Huang 等<sup>[23]</sup>基于绝对节点坐标实现了变曲率连续体机器人的快速建模与控制; Liu 等<sup>[17, 24]</sup>基于结构力学和杆-铰链 (bar-and-hinge) 模型, 实现了对曲面软体机器人受激后变形响应的较准确预测。

但是现有的软体机器人建模方法普遍存在建模难度高、建模精度低、求解复杂、计算时间长等不

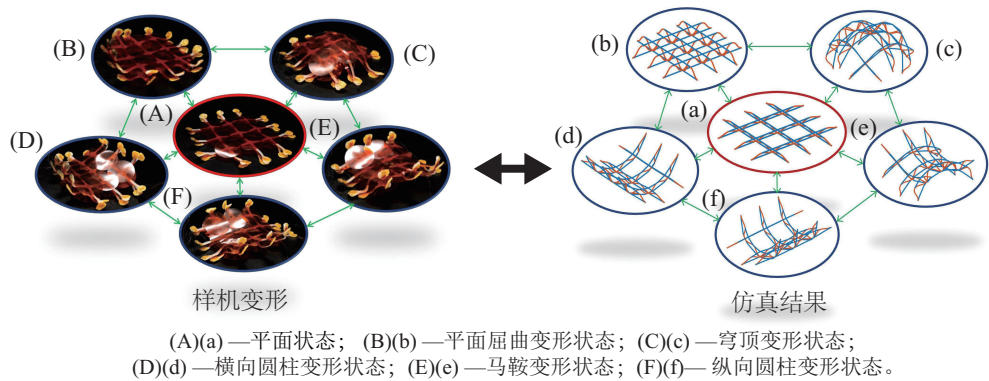


图 1 曲面软体机器人样机的变形与仿真结果

Fig.1 Prototype deformation and simulation results of soft robotic surface

足, 难以应用于实际控制和仿真训练<sup>[25]</sup>。因此, 本文提出了一种针对曲面软体机器人<sup>[17]</sup>的简化力学模型, 如图 1 所示。该简化力学模型采用特定的梁单元对软体机器人中的智能材料驱动器和弹性薄膜进行有限元离散, 并结合牛顿—拉弗森迭代法对有限元过程进行高效求解。本文还逆向推导了曲面软体机器人局部几何特性与驱动器收缩量的关系, 以指导任意曲面驱动的变形设计。上述理论和算法均在 Matlab 中进行代码实现, 所有的数值计算和仿真结果表明, 该简化力学模型可以对曲面软体机器人进行高效、精确的建模。

1 建模与计算 (Modeling and calculation)

1.1 梁单元模型设置

在结构力学中, 常用梁单元来离散建模细长物理的实体<sup>[26-27]</sup>。梁单元的基本结构如图 2 所示, 3 维空间梁单元有首尾 2 个节点, 每个节点对应 6 个自由度, 分别是  $x, y, z$  方向的位移  $u, v, w$ , 和绕  $x, y, z$  轴的转角  $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ 。梁单元可以对复杂模型进行有效降维简化, 在保证精度的前提下显著提高计算效率, 同时也支持大变形和非线性分析, 因此被研究人员广泛采用。

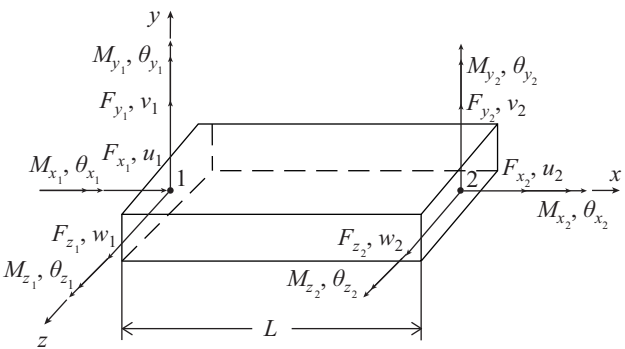


图 2 梁单元示意图

Fig.2 Schematic diagram of beam element

采取以下 2 类特定的梁单元对曲面软体机器人进行有限元建模:

1) 薄板梁单元。采用该单元建模弹性的薄膜平板结构, 单元截面为矩形。在计算过程中考虑单元大位移、小变形的特性, 采用线弹性本构。单元几何参数和力学参数如表 1 所示。

表 1 薄板梁单元的参数设置

Tab.1 Parameter setting of thin plate beam element

| 参数        | 数值      |
|-----------|---------|
| 宽度 $B$    | 15 mm   |
| 厚度 $t$    | 0.15 mm |
| 杨氏模量 $E$  | 2.0 GPa |
| 泊松比 $\mu$ | 0.34    |

2) 细长梁单元。采用该单元建模主动收缩的线性驱动器, 单元截面为圆形。单元在计算过程中考虑其线性收缩和大位移特性, 采用不可压缩材料线弹性本构。单元几何参数和模型参数如表 2 所示。

表 2 细长梁单元的参数设置

Tab.2 Parameter setting of slender beam element

| 参数        | 数值    |
|-----------|-------|
| 等效半径 $r$  | 3 mm  |
| 杨氏模量 $E$  | 1 MPa |
| 泊松比 $\mu$ | 0.5   |

1.2 曲面软体机器人有限元离散建模

本文建模的曲面软体机器人如图 3(a) 所示, 该曲面软体机器人主体为三明治结构, 上下两层为主动收缩的液晶弹性体驱动器, 中间层为聚酰亚胺弹性薄膜。上下层的液晶弹性体驱动器为曲面软体机器人提供线性驱动, 其兼具大变形和稳定的重复响应特性, 以及良好的循环驱动性能和可编程特性。



中间层的聚酰亚胺弹性薄膜在液晶弹性体的线性驱动作用下产生局部屈曲，该局部屈曲增加了曲面软体机器人的局部有效高度，进而增加了机器人的局部刚度。该机器人通过设置上下层驱动器不同的收缩量来实现自由变形。若上层驱动器和下层驱动器设置相同的收缩量，曲面软体机器人的局部刚度会随着收缩量的增加而进一步提高；若上层驱动器和下层驱动器设置不同的收缩量，曲面软体机器人则通过收缩量之差产生局部曲率，以此实现对任意自由曲面的变形。在建模的  $3 \times 3$  结构的曲面软体机器人中，一共有 42 路独立控制的驱动回路，通过对其驱动情况进行调控来实现各种不同的变形特性。

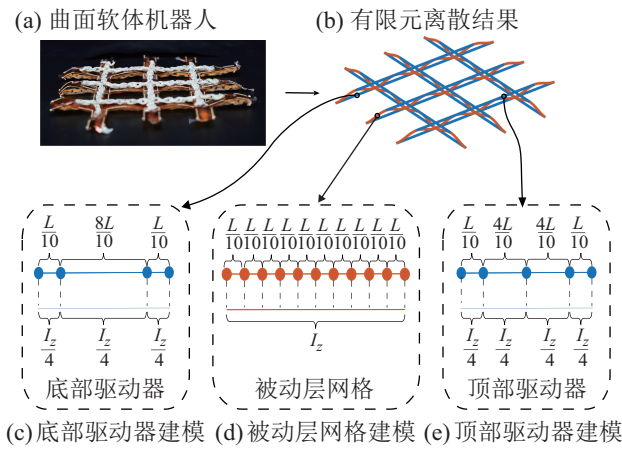


图 3 曲面软体机器人建模示意图

Fig.3 Schematic diagram of soft robotic surface modeling

采用 1.1 节中的 2 种特定的梁单元可以很好地建模上述驱动器构件和弹性薄膜构件。图 3(b) 展示了曲面软体机器人的有限元离散结果。如图 3(c) 所示，下层为矩阵式分布的液晶弹性体驱动器，每一段被建模为 3 个首尾相连的细长梁单元，其中最左侧单元与最右侧单元等长，长度均为梁单元总长度的  $1/10$ 。3 个梁单元的惯性矩和极惯性矩为原值的  $1/4$ ，以减小转矩对连接处的影响。该建模方法可以有效约束节点连接处的旋转自由度，避免结构穿模，同时在中间段保留足够的单元长度以实现线性收缩。如图 3(d) 所示，中间层为周期性分布的聚酰亚胺弹性薄膜，每一段被建模为  $n$  个首尾相连的薄板梁单元，其中  $n$  的大小以满足足够的自由度和精度为准。在本文中， $n$  取 10。如图 3(e) 所示，上层为矩阵式分布的液晶弹性体驱动器，建模方式与下层液晶弹性体驱动器相同。由于上层液晶弹性体在中点产生固定连接，故在单元中心点增加一个节点以表示该交联模式。

简化力学模型中其他几何参数如表 3 所示。

表 3 简化力学模型的其他几何参数

Tab.3 Other geometry parameters of the simplified mechanics model

| 参数    | 参数说明与取值              |
|-------|----------------------|
| $N_x$ | $x$ 方向条带数目           |
| $N_y$ | $y$ 方向条带数目           |
| $L_x$ | $x$ 方向条带间距，本文取 45 mm |
| $L_y$ | $y$ 方向条带间距，本文取 45 mm |

### 1.3 建立平衡方程

系统建立平衡方程依赖于选取运动描述的方式。在连续介质力学的背景下，常用拉格朗日描述方法在连续体从运动开始到结束期间构建所有粒子的轨迹。根据参考的平衡构形的不同，拉格朗日描述方法又被分为总体拉格朗日方法和更新拉格朗日方法<sup>[28-29]</sup>。在使用更新拉格朗日方法进行建模时，参考的平衡构形为上一增量步收敛后得到的平衡配置，如图 4 所示。Bathe 等<sup>[30]</sup>证明，与总体拉格朗日方法相比，更新拉格朗日方法对于具有大位移、大旋转、小应变的连续体变形，有着更高的计算效率，也可以更好地解决材料非线性问题。因此后续将采用更新拉格朗日方法来推导、建立平衡方程。

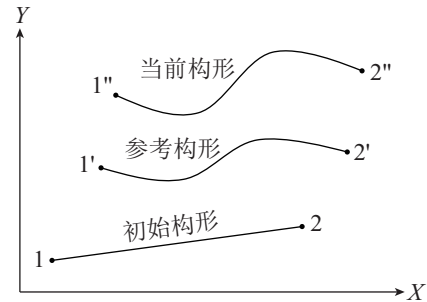


图 4 更新的拉格朗日方法

Fig.4 Updated Lagrangian method

曲面软体机器人整体结构均由弹性体组成，对于准静态过程，根据结构力学中的虚功原理<sup>[31]</sup>，当系统平衡且处于理想约束时，内力的虚功等于外力的虚功：

$$\delta W_I = \delta W_E \quad (1)$$

在弹性体中，结构的内部虚功  $\delta W_I$  由实际应力  $\tau_{ij}$  与虚位移对应的虚应变  $\delta e_{ij}$  相乘后在物体当前体积分上积分后再求和得到。

$$\delta W_I = \int_V \tau_{ij} \delta e_{ij} dV \quad (2)$$

结构的外部虚功由作用在弹性体上的体力  $f^B$ 、表面力  $f^S$ 、集中力  $f$  与相应的虚位移相乘，并在弹性体当前的体积或表面上积分得到。

$$\delta W_E = \int_V f_i^B \delta u_i dV + \int_S f_i^S \delta u_i^S dS + f_i \delta u_i \quad (3)$$

在处理大位移、大旋转等力学问题时, 常用格林—拉格朗日应变和 2 阶皮奥拉—基尔霍夫应力描述内力虚功中的应力和应变。参考  $t$  时刻的平衡构形,  $t + \Delta t$  时刻的格林—拉格朗日应变  ${}^{t+\Delta t}_t \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}$  和 2 阶皮奥拉—基尔霍夫应力  ${}^{t+\Delta t}_t \boldsymbol{S}_{ij}$  分别为

$${}^{t+\Delta t}_t \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial^t x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial^t x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial^t x_i} \frac{\partial u_k}{\partial^t x_j} \right) = {}^t e_{ij} + {}^t \eta_{ij} \quad (4)$$

$${}^{t+\Delta t}_t \boldsymbol{S}_{ij} = \frac{{}^t \rho}{{}^{t+\Delta t} \rho} \left( \frac{\partial^t x_i}{\partial^{t+\Delta t} x_m} \right) \left( \frac{\partial^t x_j}{\partial^{t+\Delta t} x_n} \right) {}^{t+\Delta t} \tau_{mn} = {}^t \tau_{ij} + {}^t S_{ij} \quad (5)$$

结合以上应力、应变表达,  $t + \Delta t$  时刻的内部虚功可重写为式 (6)。外部载荷不随几何形状的改变而发生变化, 所以外部虚功的表达可以近似认为与线性分析时相同。

$$\delta {}^{t+\Delta t} W_I = \int_V ({}^t \tau_{ij} + {}^t S_{ij}) (\delta {}^t e_{ij} + \delta {}^t \eta_{ij}) dV \quad (6)$$

$$\delta {}^{t+\Delta t} W_E = \int_V {}^{t+\Delta t} f_i^B \delta u_i dV + \int_S {}^{t+\Delta t} f_i^S \delta u_i^S dS + f_i \delta u_i \quad (7)$$

由于结构存在几何大变形, 所以应力、应变和位移之间为非线性关系。这种非线性关系在数值计算过程中需要被进一步线性化。如式 (4) 所示,  $t + \Delta t$  时刻的格林—拉格朗日应变可以被分解为线性部分  ${}^t e_{ij}$  和非线性部分  ${}^t \eta_{ij}$ 。 $t + \Delta t$  时刻的 2 阶皮奥拉—基尔霍夫应力可以分解为相对当前平衡构形产生的柯西应力  ${}^t \tau_{ij}$  和未知的应力增量  ${}^t S_{ij}$ 。应力增量由材料的本构模型决定, 其中  $C_{ijrs}$  为由材料性质决定的 4 阶张量。

$${}^t S_{ij} = C_{ijrst} e_{rs} \quad (8)$$

结合以上关系和虚功原理, 可以得到连续介质力学中基于更新拉格朗日法计算的  $t + \Delta t$  时刻系统平衡的线性方程组:

$$\int_V C_{ijrst} e_{rs} \delta {}^t e_{ij} dV + \int_V {}^t \tau_{ij} \delta {}^t \eta_{ij} dV = \delta {}^{t+\Delta t} W_E - \delta {}^t W_E \quad (9)$$

等式左侧第 1 个积分依赖于格林—拉格朗日应变的线性部分, 这里记为内部虚功的线性分量  $\delta W_I^L$ , 第 2 个积分依赖于格林—拉格朗日应变的非线性部分, 这里记为内部虚功的非线性分量  $\delta W_I^{NL}$ 。等式右侧  $\delta {}^t W_E$  和  $\delta {}^{t+\Delta t} W_E$  分别表示  $t$  时刻和  $t + \Delta t$  时刻的外

部虚功。利用有限元法对连续体积分进行有限元离散, 式 (9) 的内部和外部虚功也可以通过单元的节点位移矢量表示。通过刚度矩阵可以将内部虚功与节点位移进行联系, 外部虚功则来源于相应配置中的节点载荷  $\boldsymbol{P}$ 。因此有如下表达:

$$\delta W_I^L = \delta \boldsymbol{U}^T \boldsymbol{K}_E \Delta \boldsymbol{U} \quad (10)$$

$$\delta W_I^{NL} = \delta \boldsymbol{U}^T \boldsymbol{K}_G \Delta \boldsymbol{U} \quad (11)$$

$$\delta {}^{t+\Delta t} W_E = \delta \boldsymbol{U}^T {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{P} \quad (12)$$

$$\delta {}^t W_E = \delta \boldsymbol{U}^T {}^t \boldsymbol{P} \quad (13)$$

式 (10) 中  $\boldsymbol{K}_E$  表示结构的弹性刚度矩阵,  $\delta \boldsymbol{U}$  为虚位移,  $\Delta \boldsymbol{U}$  为这一时刻求解的位移增量。式 (11) 中  $\boldsymbol{K}_G$  表示结构的几何刚度矩阵, 式 (12)(13) 中的  ${}^{t+\Delta t} \boldsymbol{P}$  和  ${}^t \boldsymbol{P}$  对应  $t + \Delta t$  时刻和  $t$  时刻的节点外部载荷。式 (10)~式 (13) 显示了采用一般单元的节点位移对每个能量分量进行有限元离散的结果。将这些结果代入连续介质力学的系统平衡线性方程组:

$$\delta \boldsymbol{U}^T (\boldsymbol{K}_E + \boldsymbol{K}_G) \Delta \boldsymbol{U} = \delta \boldsymbol{U}^T ({}^{t+\Delta t} \boldsymbol{P} - {}^t \boldsymbol{P}) \quad (14)$$

由于虚位移  $\delta \boldsymbol{U}$  是任意的, 可以从方程两边消去, 记弹性刚度矩阵和几何刚度矩阵的和为切线刚度矩阵  $\boldsymbol{K}_T$ , 因此将有限元方法应用于线性化的连续介质力学增量平衡方程可以记作:

$$\boldsymbol{K}_T \Delta \boldsymbol{U} = \Delta \boldsymbol{P} \quad (15)$$

每一时刻的位移增量都可以表示为刚度矩阵和系统内部不平衡力之间的关系。

#### 1.4 牛顿—拉弗森迭代法

在非线性方程组的增量求解过程中, 使用牛顿—拉弗森迭代法<sup>[32]</sup>是一个相对合理的选择, 因为对于曲面软体机器人, 位移载荷曲线呈现非线性上升趋势, 不存在跳变部分, 这一特性与牛顿—拉弗森迭代法的迭代计算路径相同。并且该算法 2 阶收敛, 有着较快的收敛速度。

首先, 定义如下残差函数:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{K}(\boldsymbol{U}) \boldsymbol{U} - \boldsymbol{F} \quad (16)$$

式中  $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{U})$  表示此时的切线刚度矩阵,  $\boldsymbol{U}$  表示总位移,  $\boldsymbol{F}$  表示外部载荷。 $\boldsymbol{R}$  表示该系统此时的不平衡力, 求解系统的平衡状态就等价于求解残差函数的根, 也即消除系统内部的不平衡力。

对于第  $n + 1$  个增量步, 该步初始解为  $\boldsymbol{U}_n$ , 将残差函数在原点进行泰勒展开:

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{U}_n) + \frac{\partial \boldsymbol{R}(\boldsymbol{U}_n)}{\partial \boldsymbol{U}} \Delta \boldsymbol{U} = 0 \quad (17)$$

对比系数可得:

$$\frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{U}_n)}{\partial \mathbf{U}} = \mathbf{K}_T(\mathbf{U}_n) \quad (18)$$

所以位移增量为

$$\Delta \mathbf{U} = -\mathbf{K}_T^{-1}(\mathbf{U}_n) \mathbf{R} \quad (19)$$

位移更新为

$$\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + \Delta \mathbf{U} \quad (20)$$

循环计算更新位移直至该增量步收敛。更新增量步的载荷状态直至载荷状态达到外部加载条件,迭代结束。牛顿-拉弗森迭代法的计算流程如图 5 所示。

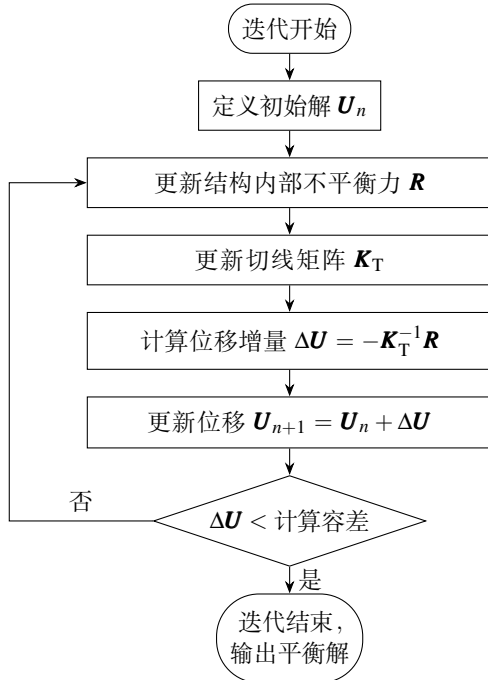


图 5 牛顿-拉弗森迭代法流程图

Fig.5 The flowchart of Newton-Raphson iteration method

在简化力学模型的迭代计算过程中,通过在每一个迭代步中缩短平衡时的目标原长,使结构内部产生不平衡力,使用牛顿-拉弗森迭代法消除该内部不平衡力直至迭代步达到平衡,不断缩减原长至目标收缩量时,迭代计算结束。

### 1.5 逆向设计

采用有限元离散和牛顿-拉弗森迭代法可以构建曲面软体机器人局部驱动带动整体变形的正向计算流程,但是在实际运用中,控制算法在决定曲面软体机器人的整体变形后,需要根据曲面的局部几何特性逆向计算驱动器的收缩情况。因此接下来推导的逆向关系,是曲面软体机器人运动控制输入的基础。

图 6 为曲面软体机器人局部变形状态,其中  $\lambda_T$  表示顶部驱动器的收缩量,  $\lambda_B$  表示底部驱动器的收缩量,  $l$  表示初始状态下的长度,  $h$  为局部高度,  $\theta$  为对应圆心角,  $R_B, R_M, R_T$  分别对应底部拟合半径、平均拟合半径和顶部拟合半径。

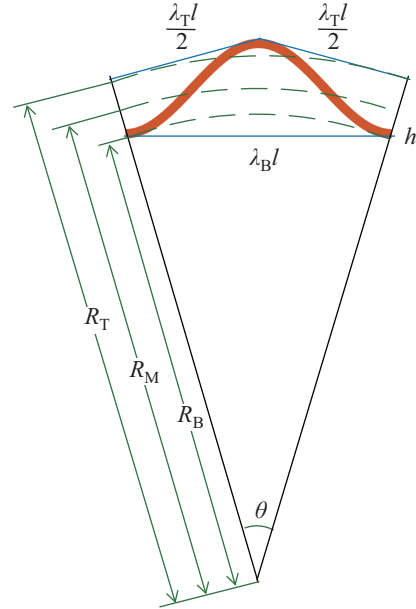


图 6 曲面软体机器人局部变形状态

Fig.6 Local deformation state of soft robotic surface

假设曲面软体机器人的局部高度由顶部和底部驱动器收缩量的平均值决定,顶部和底部驱动器收缩量的差值产生局部曲率。记顶部驱动器收缩量和底部驱动器收缩量的平均值为  $\lambda = \frac{\lambda_T + \lambda_B}{2}$ ,考虑到驱动器的极限驱动性能,  $\lambda$  的取值范围为  $[0.6, 1]$ ,中间被动层近似为两段对称的折线,记折线的总长度为  $2L$ ,当  $\lambda$  减小时,半折线长度和平均收缩量  $\lambda$  近似存在以下线性关系:

$$L = (0.1\lambda + 0.9) \times \frac{l}{2} \quad (21)$$

则局部高度通过勾股定理可以解得:

$$h = \sqrt{L^2 - \left(\frac{\lambda l}{2}\right)^2} \quad (22)$$

将折线长度近似为圆弧长度,由弧长公式可写出如下方程组关系:

$$\begin{cases} \theta R_T = \lambda_T l \\ \theta R_B = \lambda_B l \end{cases} \quad (23)$$

解得圆心角为

$$\theta = \frac{(\lambda_T - \lambda_B)l}{h} \quad (24)$$

代入圆心角—弧长—半径关系可得  $R_B, R_M, R_T$  关于局部高度  $h$ 、收缩量  $\lambda_T$  和  $\lambda_B$  的显式表达:

$$R_B = \frac{1}{\kappa_B} = \frac{h\lambda_B}{\lambda_T - \lambda_B} \quad (25)$$

$$R_M = \frac{1}{\kappa_M} = \frac{h(\lambda_T + \lambda_B)}{2(\lambda_T - \lambda_B)} \quad (26)$$

$$R_T = \frac{1}{\kappa_T} = \frac{h\lambda_T}{\lambda_T - \lambda_B} \quad (27)$$

考虑到曲面的平滑性和代表性, 选择曲面软体机器人的底面几何特征来拟合机器人的整体形状, 并以此来通过局部曲率特性反解局部收缩量。结合式 (21) 和式 (22) 可以获得关于平均收缩量的一元二次方程:

$$\frac{4h^2}{l^2} = (0.1\lambda + 0.9)^2 - \lambda^2 \quad (28)$$

该方程对应 2 个实根, 考虑到  $\lambda$  的取值范围, 选取正实根, 即:

$$\lambda = \frac{0.18 + \sqrt{0.18^2 - 4 \times 0.99 \left( \frac{4h^2}{l^2} - 0.9^2 \right)}}{2} \quad (29)$$

结合式 (25) 可以解得:

$$\lambda_B = \frac{0.18 + \sqrt{0.18^2 - 4 \times 0.99 \left( \frac{4h^2}{l^2} - 0.9^2 \right)}}{2 + \kappa_B h} \quad (30)$$

$$\lambda_T = \frac{0.18(\kappa_B h + 1) + \sqrt{0.18^2 - 4 \times 0.99 \left( \frac{4h^2}{l^2} - 0.9^2 \right)}}{2 + \kappa_B h} \quad (31)$$

式中, 仅曲面局部曲率  $\kappa_B$  和局部高度  $h$  为未知量。在实际应用中, 局部高度  $h$  可以根据实际情况给定, 曲面局部曲率  $\kappa_B$  的值可以由用户输入决定, 也可以由控制算法决定, 给定以上参数即可决定曲面软体机器人的局部收缩情况。

## 2 数值计算结果 (Numerical results)

为了验证以上算法, 设计了以下算例对  $N_x = 3$ ,  $N_y = 3$  的均匀网格结构的曲面软体机器人的变形进行仿真计算。每个算例中均设置了不同的驱动器收缩情况以展现该模型和算法的普适性, 并记录在本地设备上的平均运行时间以展示算法的高效性。图 7 展示了曲面软体机器人底部特征点的对应关系, 后续算例会在迭代过程中跟踪其中部分特征点的位置变化。

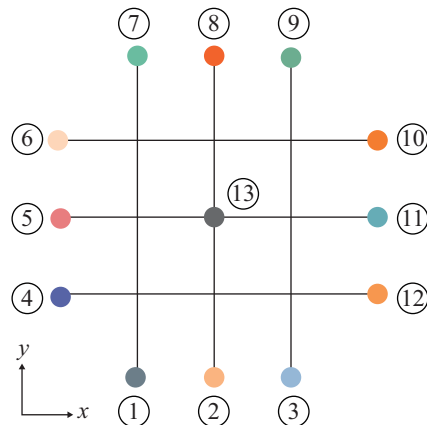


图 7 特征点示意图

Fig.7 Schematic diagram of feature points

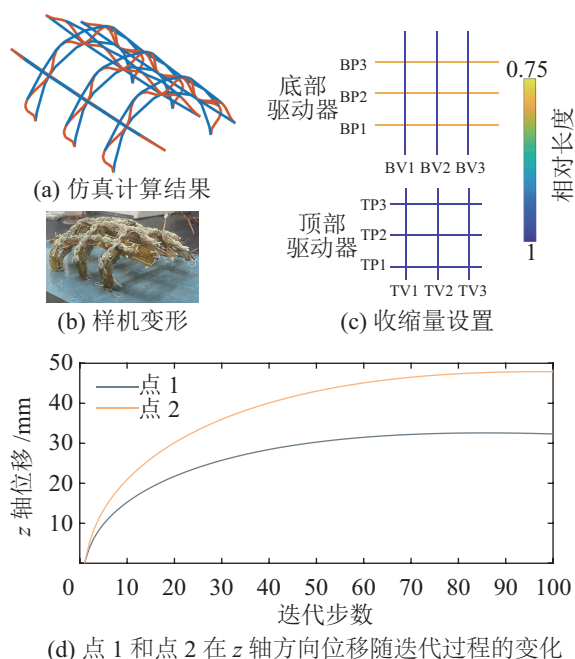


图 8 圆柱形模型变形的仿真计算结果

Fig.8 Simulation results of cylindrical model deformation

图 8 为圆柱形模型的变形算例。在该算例中, 底部所有横向驱动器 (BP1、BP2、BP3) 的收缩量为 0.75, 其余驱动器的收缩量为 0.95, 驱动器收缩情况如图 8(c) 所示。图 8(a) 展示了简化力学模型的计算结果, 图 8(b) 为对应实体样机的变形状态。根据模型的对称性, 图 8(d) 跟踪了点 1 和点 2 的  $z$  轴位移随模型变化的情况, 展现出了显著的大变形非线性特征。选取该算例中与点 4 连接的驱动器为代表, 对比计算过程中的真实收缩量和实际收缩量。如图 9 所示, 材料本身的软弹性特征使驱动器在被动层的反力作用下被动伸长, 可见建模准确合理。该算例在本地设备 (CPU: i9-13900K, @3.0GHz) 上的平均计算时长为 13.96 s, 迭代步数为 100 步。



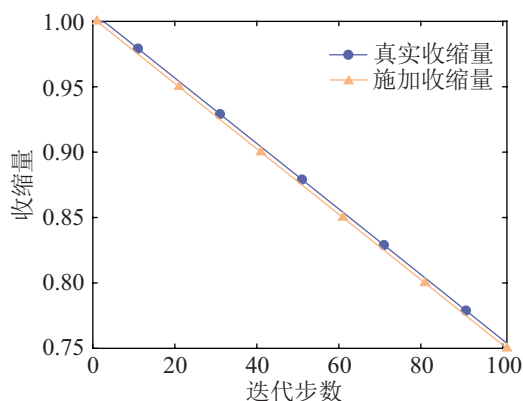


图9 驱动器真实收缩量与施加收缩量对比

Fig.9 True shrinkage versus imposed shrinkage of the actuator

图 10 为穹顶形模型的变形算例。在该算例中,底部所有横向驱动器 (BP1、BP2、BP3) 和所有纵向驱动器 (BV1、BV2、BV3) 的收缩量为 0.75,其余驱动器的收缩量为 0.95,驱动器收缩情况如图 10(c) 所示。图 10(a) 展示了简化力学模型的计算结果,图 10(b) 为对应实体样机的变形状态。根据模型的对称性,图 10(d) 跟踪了点 2 和点 13 的  $z$  轴位移随模型变形的变化情况。该算例在本地设备上的平均计算时长为 27.86 s,迭代步数为 100 步。

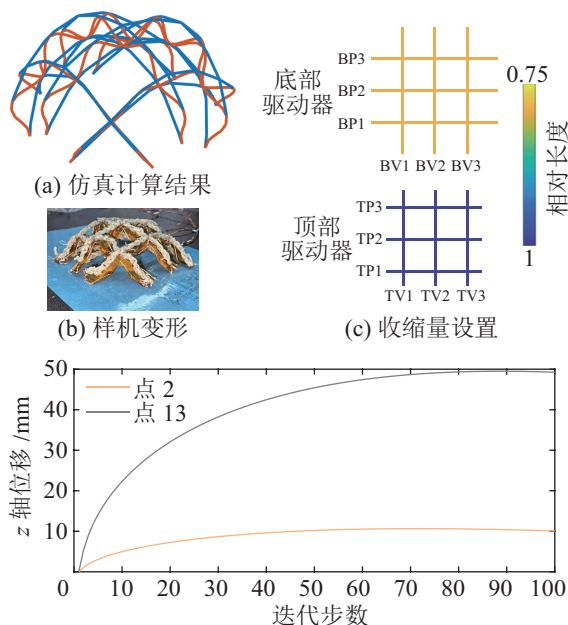
(d) 点 2 和点 13 在  $z$  轴方向位移随迭代过程的变化

图 10 穹顶形模型变形的仿真计算结果

Fig.10 Simulation results of dome shaped model deformation

图 11 为波浪形模型的变形算例。在该算例中,底部右半横向驱动器和顶部左半横向驱动器的收缩量为 0.75,其余驱动器的收缩量为 0.9,驱动器收缩情况如图 11(c) 所示。图 11(a) 展示了简化力学模型的计算结果,图 11(b) 为对应实体样机的变形状态。根据模型的对称性,图 11(d) 跟踪了点 1、点 3、点 4 和点 12 的  $z$  轴位移随模型变形的变化情况。该算例在本地设备上的平均计算时长为 12.10 s,迭代步数为 100 步。

态。根据模型的对称性,图 11(d) 跟踪了点 1、点 3、点 4 和点 12 的  $z$  轴位移随模型变形的变化情况。该算例在本地设备上的平均计算时长为 12.10 s,迭代步数为 100 步。

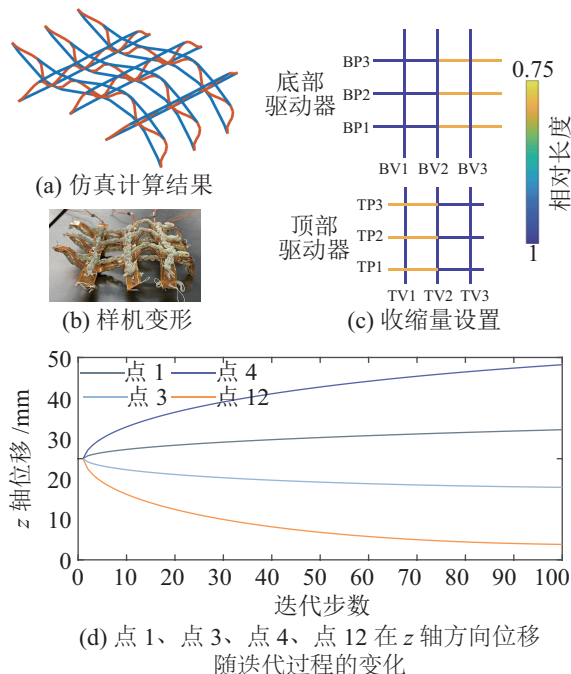


图 11 波浪形模型变形的仿真计算结果

Fig.11 Simulation results of wave shaped model deformation

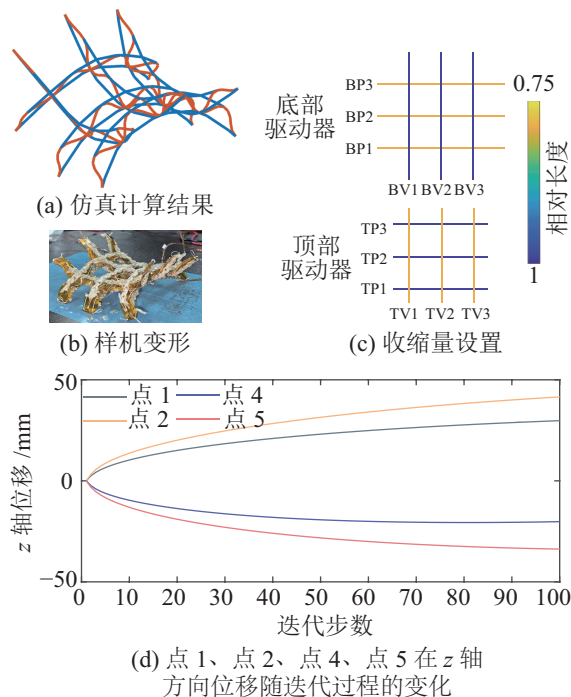
(d) 点 1、点 2、点 4、点 5 在  $z$  轴方向位移随迭代过程的变化

图 12 马鞍形模型变形的仿真计算结果

Fig.12 Simulation results of saddle shaped model deformation

图 12 为马鞍形模型的变形算例。在该算例中,底部所有横向驱动器 (BP1、BP2、BP3) 和顶部所有纵向驱动器 (TV1、TV2、TV3) 的收缩量为



0.75, 其余驱动器的收缩量为 0.9, 驱动器收缩情况如图 12(c) 所示。图 12(a) 展示了简化力学模型的计算结果, 图 12(b) 为对应实体样机的变形状态。根据模型的对称性, 图 12(d) 跟踪了点 1、点 2、点 4 和点 5 的  $z$  轴位移随模型变形的变化情况。该算例在本地设备上的平均计算时长为 13.06 s, 迭代步数为 100 步。

图 13 展示了更多均匀网格变形算例的计算结果。通过对驱动器网格施加局部驱动或不对称

驱动, 实现了单角翻折 (图 13(a))、双角翻折 (图 13(b))、四角翻折 (图 13(c))、L 形单边小翻折 (图 13(d))、L 形单边大翻折 (图 13(e)) 和四边翻折 (图 13(f)) 6 种算例的仿真效果。图 13 各个子图的右上角展示了每个仿真算例的驱动器收缩情况。将这些收缩情况加载在实体样机中可以得到对应的样机实际变形 (如图 13 各子图右下角所示)。仿真变形结果和样机实际变形结果有很好的对应关系, 可见采用该模型可对曲面软体机器人进行有效建模。

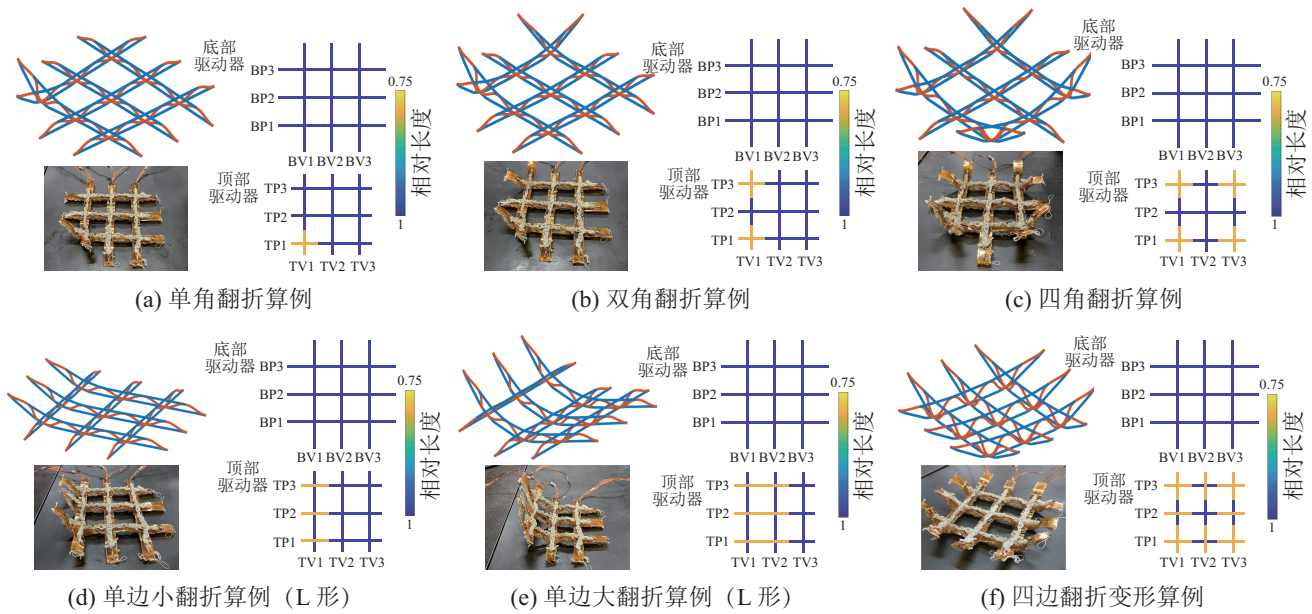


图 13 更多均匀网格算例的仿真计算结果

Fig.13 Simulation results of the additional uniform mesh examples

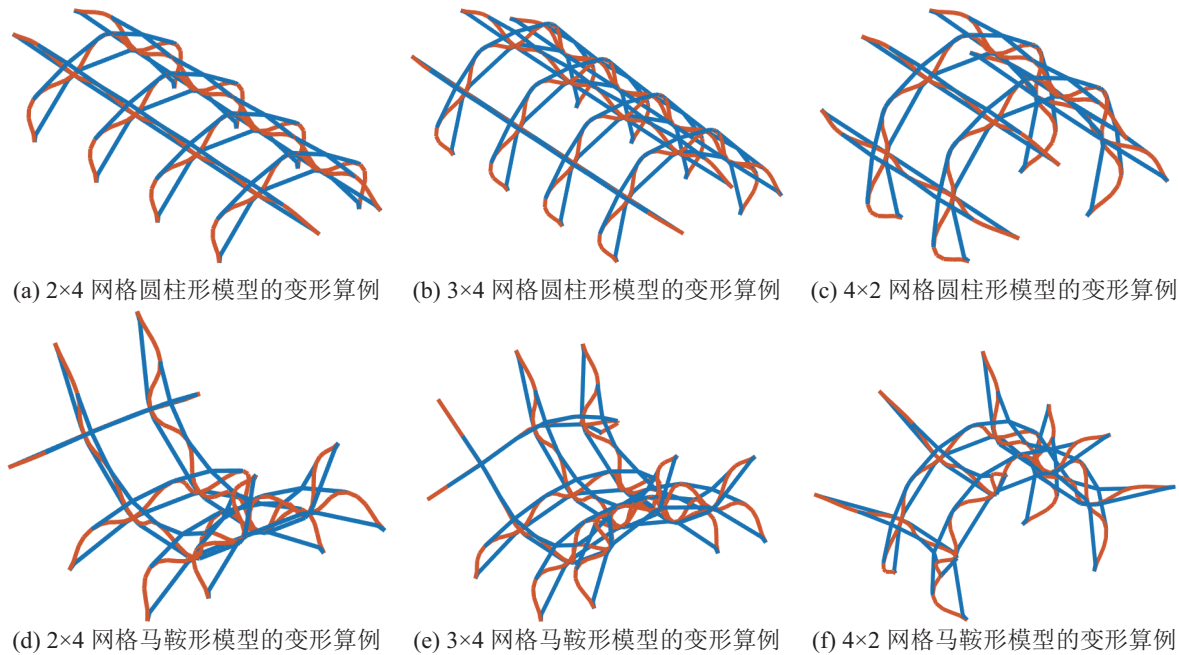


图 14 非均匀网格算例的仿真计算结果

Fig.14 Simulation results of the non-uniform mesh examples

图 14 提供了非均匀网格变形算例的计算结果。图中的网格结构分别为  $N_x = 2, N_y = 4$  的网格结构,  $N_x = 3, N_y = 4$  的网格结构和  $N_x = 4, N_y = 2$  的网格结构。图 14(a)~(c) 为圆柱形模型的变形算例, 驱动器收缩量设置与图 8(c) 一致。图 14(d)~(f) 为马鞍形模型的变形算例, 收缩量设置与图 12(c) 一致。从图 14 的仿真结果中可以看出, 对于非均匀网格结构的曲面软体机器人, 采用本文的简化力学模型均可实现有效建模和高效的仿真计算。

为了验证仿真变形结果可以拟合真实样机变形结果, 使用动作捕捉平台获取图 7 所示特征点在样机单一变形过程中的位移变化, 并与仿真结果进行对比。本次选取的变形算例为图 13(f) 四边翻折变形算例, 仿真计算输入和真实输入相同。图 15(a) 和图 15(b) 分别展示了动作捕捉平台捕获到的实验样机变形, 以及仿真变形结果, 两者拥有相同的变形状态。在图 15(c) 中, 相对误差定义为  $z$  轴真实

位移与仿真位移差值的绝对值与样机尺寸的比值。经计算, 该算例的平均相对误差为 1.44%, 最大相对误差为 3.91%。样机的装配误差、液晶弹性体驱动器的响应误差等都会对样机的变形产生影响, 可见, 在误差允许范围内, 简化力学模型可以较好地拟合真实样机变形。

3 逆向设计结果 (Inverse design results)

结合曲面软体机器人的局部几何特性, 通过式 (30) 和式 (31) 可以计算出顶部驱动器和底部驱动器的收缩量, 进而得到任意预设的变形状态。本节对不同网格结构和不同目标变形状态进行逆向设计和仿真计算。

图 16 展示了均匀网格结构的曲面软体机器人根据局部曲率特性进行逆向设计, 最终得到的仿真变形状态。逆向设计的输入参数、设计结果和计算结果的平均相对误差如表 4 所示。逆向设计的输入参数为目标曲面的局部曲率 ( $x$  方向的局部曲率  $\kappa_x$ ,  $y$  方向的局部曲率  $\kappa_y$ ) 和曲面的局部高度  $h$ 。依据逆向设计的输入参数可以确定驱动器唯一的收缩量, 表 4 中的 TP、TV、BP、BV 分别表示机器人

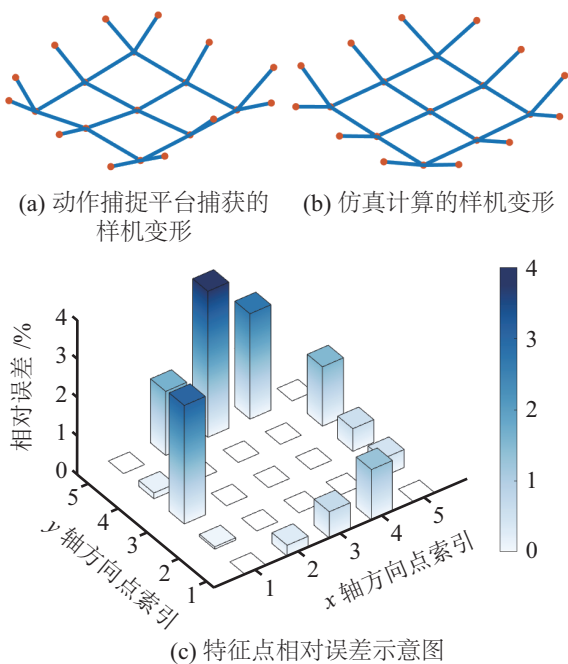


图 15 样机真实变形与仿真变形结果对比

Fig.15 Comparison of the results of real deformation and simulated deformation of the prototype

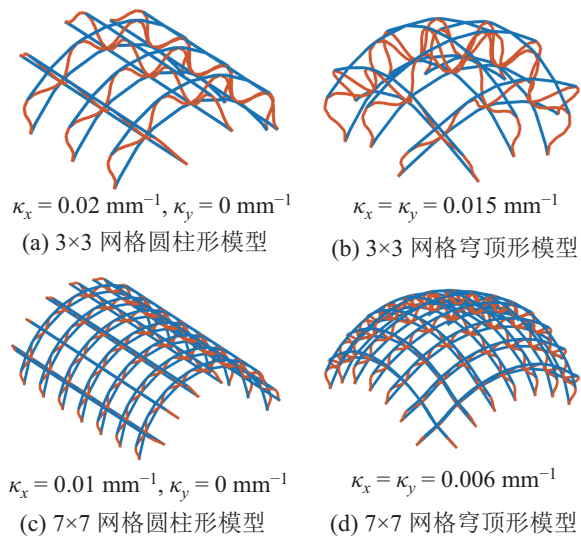


图 16 均匀网格算例的逆向设计结果

Fig.16 Inverse design results of the uniform mesh examples

表 4 均匀网格结构算例的输入参数与逆向设计结果对照表

Tab.4 Comparison table of input parameters and inverse design results of the uniform mesh examples

| 逆向设计算例      | 输入参数                        |                             |                 | 逆向设计结果 |      |      |      | 平均相对误差 /% |
|-------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------|--------|------|------|------|-----------|
|             | $\kappa_x / \text{mm}^{-1}$ | $\kappa_y / \text{mm}^{-1}$ | $h / \text{mm}$ | TP     | TV   | BP   | BV   |           |
| 3×3 网格圆柱形模型 | 0.02                        | 0                           | 13              | 0.87   | 0.78 | 0.69 | 0.78 | 13.00     |
| 3×3 网格穹顶形模型 | 0.015                       | 0.015                       | 14              | 0.81   | 0.81 | 0.67 | 0.67 | 11.03     |
| 7×7 网格圆柱形模型 | 0.01                        | 0                           | 9               | 0.94   | 0.90 | 0.86 | 0.90 | 3.43      |
| 7×7 网格穹顶形模型 | 0.006                       | 0.006                       | 12              | 0.85   | 0.85 | 0.79 | 0.79 | 7.72      |

的顶部横向驱动器、顶部纵向驱动器、底部横向驱动器和底部纵向驱动器, 对应数值为驱动器的收缩量。对图 16 所示计算结果的底部特征点进行 B 样条曲线拟合得到输出曲率。输入输出的相对误差定义为输出曲率与输入曲率差值的绝对值与输入曲率的比值。相对误差是衡量算法准确性的一个重要指标。

图 17 展示了非均匀网格算例的逆向设计结果。图 17(a)~(c) 分别为  $N_x = 2$ 、 $N_y = 4$  网格结构,  $N_x = 3$ 、 $N_y = 4$  网格结构,  $N_x = 4$ 、 $N_y = 2$  网格结构的曲面软体机器人圆柱形模型变形状态的逆向设计。局部曲率设置为  $\kappa_x = 0.02 \text{ mm}^{-1}$ 、 $\kappa_y = 0$ , 局部高度  $h = 13 \text{ mm}$ , 式 (30) 和式 (31) 计算得到的顶部横向驱动器的收缩量为 0.87, 顶部纵向驱动器的收缩量为 0.78, 底部横向驱动器的收缩量为 0.69, 底部纵向驱动器的收缩量为 0.78。对计算后的底部特征点进行 B 样条曲线拟合得到输出曲率。以上 3 个算例的平均相对误差分别为 3%、3.6%、3.5%。

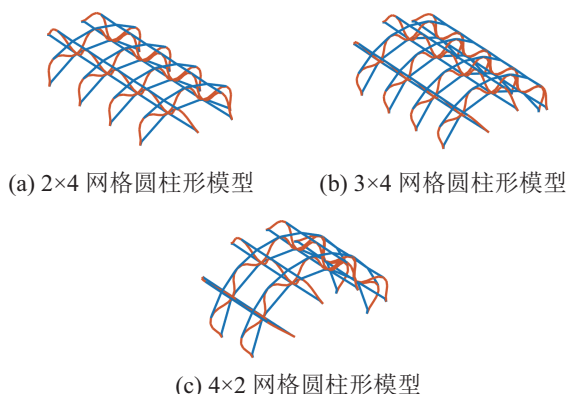


图 17 非均匀网格算例的逆向设计结果

Fig.17 Inverse design results of the non-uniform mesh examples

在上述的所有逆向设计算例中, 计算得到的曲面整体构形与输入的曲率要求完全一致, 曲面的局部高度与预设的曲面高度也基本相同, 证明了逆向设计理论的有效性。在  $3 \times 3$  的网格结构中, 输入曲率与输出曲率的平均相对误差控制在 15% 以下。在  $7 \times 7$  的网格结构中, 随着网格密度增大, 曲面特征点数量增多, 曲面形状的分辨率也进一步提高, 简化模型中的特征点对于曲面也有了更好的拟合效果, 计算得到的曲率相对误差进一步减小, 控制在 10% 以内。以上结果进一步证明了逆向设计理论的正确性。同时也将该算法应用在非均匀网格结构的曲面软体机器人的逆向设计中, 仿真结果也表明了该算法对不同网格结构的曲面软体机器人具有普适性。

## 4 结论 (Conclusion)

结合特定的梁单元和非线性有限元理论, 提出了一种针对曲面软体机器人的简化力学模型。本文的主要研究内容如下:

(1) 以简化力学模型为基础, 使用特定的梁单元对曲面软体机器人中的构件进行有限元离散, 结合增量平衡方程和牛顿-拉弗森迭代法对变形过程进行求解。以上理论和算法均在 Matlab 中实现, 并对机器人多种变形模态进行了高效计算和仿真。

(2) 推导了曲面软体机器人局部变形与驱动器收缩量的逆向关系, 根据预设的曲面几何特性逆向计算了驱动器的收缩量, 计算结果表明该逆向设计方法可以很好地指导曲面软体机器人向任意形状变形。

本文提出的简化力学模型通过对机器人的有效降维, 显著提升了计算速度, 在本文提及的算例中, 平均每一个迭代步的计算时间均小于 0.3 s, 这对于曲面软体机器人实时控制的应用具有重要意义。同时本文推导的逆向设计方法可以根据目标曲面的几何特征迅速计算收缩量, 此收缩量可以作为初始信号输入给机器人系统用于前馈控制, 并可以在后续通过为机器人系统提供反馈信号实现对机器人变形的修正和精确控制。

后续研究将在该简化模型的基础上进一步发掘内部几何共性, 对曲面软体机器人实现进一步降维建模。随着曲面软体机器人模型维度的进一步降低, 计算速度和效率将会大大增加, 将为曲面软体机器人在真实环境中的实时反馈和控制提供更高效的计算平台。

## 参考文献 (References)

- [1] HAWLEY L, SULEIMAN W. Control framework for cooperative object transportation by two humanoid robots[J]. Robotics and Autonomous Systems, 2019, 115: 1-16.
- [2] ZHONG J, ZHU Y, ZHAO C, et al. Position tracking of a pneumatic-muscle-driven rehabilitation robot by a single neuron tuned PID controller[J]. Complexity, 2020. DOI: 10.1155/2020/1438391.
- [3] SHIN B, HA J, LEE M, et al. Hygrobot: A self-locomotive ratcheted actuator powered by environmental humidity[J]. Science Robotics, 2018, 3(14). DOI: 10.1126/scirobotics.aar2629.
- [4] PEDERSEN M R, NALPANTIDIS L, ANDERSEN R S, et al. Robot skills for manufacturing: From concept to industrial deployment[J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2016, 37: 282-291.
- [5] MATTHIAS B, OBERER-TREITZ S, STAAB H, et al. Injury risk quantification for industrial robots in collaborative operation with humans[C]//41st International Symposium on Robotics and 6th German Conference on Robotics. Frankfurt, Germany: VDE, 2010.

- [6] LEE C, KIM M, KIM Y J, et al. Soft robot review[J]. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2017, 15: 3-15.
- [7] 文力, 王贺升. 软体机器人研究展望: 结构、驱动与控制[J]. *机器人*, 2018, 40(5): 577.  
WEN L, WANG H S. Perspective of soft robotics: Structure, actuation, and control[J]. *Robot*, 2018, 40(5): 577.
- [8] LIU X, WANG L, XIANG Y, et al. Magnetic soft microfiberbots for robotic embolization[J]. *Science Robotics*, 2024, 9(87). DOI: 10.1126/scirobotics.adh2479.
- [9] GU G, ZOU J, ZHAO R, et al. Soft wall-climbing robots[J]. *Science Robotics*, 2018, 3(25). DOI: 10.1126/scirobotics.aat287.
- [10] LI G, CHEN X, ZHOU F, et al. Self-powered soft robot in the Mariana Trench[J]. *Nature*, 2021, 591(7848): 66-71.
- [11] LI G, WONG T W, SHIH B, et al. Bioinspired soft robots for deep-sea exploration[J]. *Nature Communications*, 2023, 14(1). DOI: 10.1038/s41467-023-42882-3.
- [12] ALAPAN Y, KARACAKOL A C, GUZELHAN S N, et al. Reprogrammable shape morphing of magnetic soft machines[J]. *Science Advances*, 2020, 6(38). DOI: 10.1126/sciadv.abc6414.
- [13] XU T, HUANG C, LAI Z, et al. Independent control strategy of multiple magnetic flexible millirobots for position control and path following[J]. *IEEE Transactions on Robotics*, 2022, 38(5): 2875-2887.
- [14] 徐天添, 黄晨阳, 刘佳, 等. 磁驱动微型机器人的智能控制发展现状[J]. *机器人*, 2023, 45(5): 603-625.  
XU T T, HUANG C Y, LIU J, et al. Advances in intelligent control of magnetically actuated micro-robots[J]. *Robot*, 2023, 45(5): 603-625.
- [15] XIE Z, DOMEL A G, AN N, et al. Octopus arm-inspired tapered soft actuators with suckers for improved grasping[J]. *Soft Robotics*, 2020, 7(5): 639-648.
- [16] KIM M K, PARASURAMAN R N, WANG L, et al. Soft-packaged sensory glove system for human-like natural interaction and control of prosthetic hands[J]. *NPG Asia Materials*, 2019, 11(1): 43.
- [17] LIU K, HACKER F, DARAIO C. Robotic surfaces with reversible, spatiotemporal control for shape morphing and object manipulation[J]. *Science Robotics*, 2021, 6(53). DOI: 10.1126/scirobotics.abf511.
- [18] 梁定坤, 陈轶珩, 孙宁, 等. 气动人工肌肉驱动的机器人控制方法研究现状概述[J]. *控制与决策*, 2021, 36(1): 27-41.  
LIANG D K, CHEN Y H, SUN N, et al. Overview of control methods for pneumatic artificial muscle-actuated robots[J]. *Control and Decision*, 2021, 36(1): 27-41.
- [19] 邢志广, 林俊, 赵建文. 人工肌肉驱动器研究进展综述[J]. *机械工程学报*, 2021, 57(9): 1-11.  
XING Z G, LIN J, ZHAO J W. Overview of the artificial muscle actuators[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2021, 57(9): 1-11.
- [20] 梅栋, 赵鑫, 唐刚强, 等. 软体机器人建模与控制技术研究进展[J]. *机器人*, 2024, 46(2): 234-256.  
MEI D, ZHAO X, TANG G Q, et al. A review of soft robot modeling and control[J]. *Robot*, 2024, 46(2): 234-256.
- [21] KATZSCHMANN R K, MARCHESE A D, RUS D. Autonomous object manipulation using a soft planar grasping manipulator[J]. *Soft Robotics*, 2015, 2(4): 155-164.
- [22] RENDA F, GIORELLI M, CALISTI M, et al. Dynamic model of a multibending soft robot arm driven by cables[J]. *IEEE Transactions on Robotics*, 2014, 30(5): 1109-1122.
- [23] HUANG X, ZOU J, GU G. Kinematic modeling and control of variable curvature soft continuum robots[J]. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2021, 26(6): 3175-3185.
- [24] LIU K, PAULINO G H. Nonlinear mechanics of non-rigid origami: An efficient computational approach[J]. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2017, 473(2206). DOI: 10.1098/rspa.2017.0348.
- [25] 蒋国平, 孟凡昌, 申景金, 等. 软体机器人运动学与动力学建模综述[J]. *南京邮电大学学报 (自然科学版)*, 2018, 38(1): 20-26.  
JIANG G P, MENG F C, SHEN J J, et al. Review of the kinematics and dynamics modeling for the soft robot[J]. *Journal of Nanjing University of Posts and Telecommunications (Natural Science Edition)*, 2018, 38(1): 20-26.
- [26] 张健, 齐朝晖, 卓英鹏, 等. 基于精确几何模型梁单元的螺旋弹簧刚度分析[J]. *工程力学*, 2020, 37(2): 16-22, 80.  
ZHANG J, QI Z H, ZHUO Y P, et al. Stiffness analysis of helix spring using exact geometric beam element[J]. *Engineering Mechanics*, 2020, 37(2): 16-22, 80.
- [27] SANTOS H. A new finite element formulation for the dynamic analysis of beams under moving loads[J]. *Computers & Structures*, 2024, 298. DOI: 10.1016/j.compstruc.2024.107347.
- [28] WANG L, YOU Y, LIU W, et al. Geometric nonlinear analysis of anglesection elements based on updated lagrangian formulation and rigid body rule[J]. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2024, 24(22). DOI: 10.1142/S0219455424502535.
- [29] GRECO L, CUOMO M, CASTELLO D, et al. An updated Lagrangian Bézier finite element formulation for the analysis of slender beams[J]. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2022, 27(10): 2110-2138.
- [30] BATHE K J, BOLOURCHI S. Large displacement analysis of three-dimensional beam structures[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1979, 14(7): 961-986.
- [31] ANTMAN S S, OSBORN J E. The principle of virtual work and integral laws of motion[J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1979, 69: 231-262.
- [32] CIMEN T, MILLIDERE M, KARAMAN U, et al. Newton-Raphson methods in aircraft trim: A comparative study[C]// *AIAA Aviation 2020 Forum*. New York, USA: AIAA. 2020. DOI: 10.2514/6.2020-3198.

## 作者简介:

程屹涛 (2000—), 男, 博士生。研究领域: 软体机器人。  
刘珂 (1991—), 男, 博士, 研究员。研究领域: 柔性结构与软体机器, 结构优化, 可展结构, 力学超材料。